UNIVERSITE PAUL SABATIER
L1 PCP

Année Universitaire 2010 -2011
Lundi 28 février 2011

Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices, des documents personnels et téléphones portables, est interdit.

(Durée : 45 minutes)

NOM :	**Prénom :**	**Groupe :**	***Note (/20) :***

I- Questions de cours :

On explicitera toutes les grandeurs introduites dans les réponses.

1- Enoncer la première loi de Newton.

Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne et uniforme, aussi longtemps qu'aucune force ne vient modifier son état.

2- Enoncer la relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen.

$$m\,\vec{a}(M/R') = \sum \vec{F}_{ext}(M/R') = \sum \vec{F}_{vraies} + \vec{F}_{ie}(M,R'/R) + \vec{F}_{ic}(M,R'/R)$$

NON Galiléen (R') galiléen (R).

3- Enoncer le théorème du moment cinétique en un point fixe.

$$\left[\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(M/R)}{dt}\right]_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}(M/R))$$

4- Enoncer la troisième loi de Newton.

P.A.R : $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$

5- Donner la définition du champ de gravitation et de la pesanteur.

Chp de gravitation = $\vec{G}_T = -\frac{G M_T}{r^2}\vec{e}_r$

Chp de pesanteur = $\vec{g} = \vec{G}_T + \Omega^2\,\vec{HM}$ (H proj. orthogonal de M selon $\vec{\Omega}$)

II- Cinématique : mouvement hélicoïdal

Un point matériel M décrit, par rapport à un repère galiléen $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, une trajectoire définie par les équations paramétriques :

$$x = b\sin\omega t\,,\ y = b\left(1-\cos\omega t\right) \text{ et } z = b\omega t\,, \text{ où } b \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives.}$$

a) Rappeler la définition des coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) de M en fonction de ses coordonnées cartésiennes, puis les exprimer en fonction du paramètre t.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{b^2\sin^2\omega t + b^2(1-\cos\omega t)^2}$$

$$\Rightarrow \rho = b\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\omega t} = 2b\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1-\cos\omega t}{\sin\omega t} = \frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\omega t/2}{\cancel{2}\cancel{\sin\frac{\omega t}{2}}\cos\frac{\omega t}{2}} = \tan\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\omega t}{2}$$

$$z = b\omega t$$

b) Soit H, le projeté orthogonal de M dans le plan (xOy). Quelles sont ses coordonnées cartésiennes (x_H, y_H, z_H), et ses coordonnées cylindriques (ρ_H,φ_H,z_H) ?

$x_H = x = b\sin\omega t$ $\qquad y_H = y = b(1-\cos\omega t)$ $\qquad z_H = 0$

$\rho_H = \rho = 2b\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$ $\qquad \varphi_H = \varphi = \frac{\omega t}{2}$ $\qquad z_H = 0$

c) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de H. Quelle est la trajectoire de H ?

$$b\cos\omega t = b - y_H \Rightarrow b^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t = (b-y_H)^2 + x_H^2$$

$$\Rightarrow x_H^2 + (y_H - b)^2 = b^2$$ = cercle de centre $(0,b)$ et rayon b.

d) Déterminer l'équation cylindrique de la trajectoire de H.

$$\rho_H = 2b\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| = 2b\left|\sin\varphi_H\right|$$

e) Déterminer les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport à $\mathscr{R}$.

$$\vec{v}(M|R) = \left[\frac{d\vec{OM}}{dt}\right]_R = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{Bca} = b\omega \begin{vmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 1 \end{vmatrix}_{Bca}$$

$$\vec{a}(M|R) = \left[\frac{d\vec{v}(M|R)}{dt}\right]_R = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}_{Bca} = b\omega^2 \begin{vmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{vmatrix}_{Bca}$$

f) Déterminer les coordonnées cylindriques des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport à $\mathscr{R}$.

$$\vec{v}(M|R) = \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{Bcy} = \begin{vmatrix} \cancel{2}b\frac{\omega}{\cancel{2}}\cos\frac{\omega t}{2} \\ \cancel{2}b\sin\frac{\omega t}{2}\cdot\frac{\omega}{\cancel{2}} \\ b\omega \end{vmatrix}_{Bcy} = b\omega \begin{vmatrix} \cos\omega t/2 \\ \sin\omega t/2 \\ 1 \end{vmatrix}_{Bcy}$$

$$\vec{a}(M|R) = b\frac{\omega^2}{2} \begin{vmatrix} -\sin\frac{\omega t}{2} \\ \cos\omega t/2 \\ 0 \end{vmatrix}_{Bcy} + b\omega \begin{vmatrix} -\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2} \\ \frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2} \\ 0 \end{vmatrix}_{Bcy} = b\omega^2 \begin{vmatrix} -\sin\omega t/2 \\ \cos\omega t/2 \\ 0 \end{vmatrix}_{Bcy}$$

g) Rappeler la définition de la base de Frénet (ou base intrinsèque), puis déterminer les coordonnées intrinsèques des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport à $\mathscr{R}$.

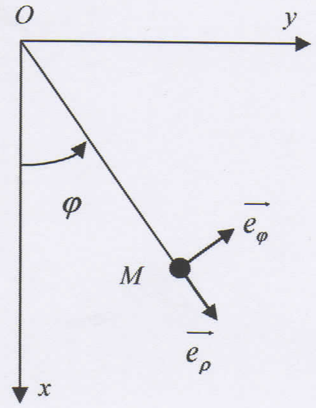
$(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b)$ trièdre direct avec $\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ et $\vec{e}_n$ dirigé vers la concavité.

$$\Rightarrow \vec{v} = \|\vec{v}\|\,\vec{e}_t = \sqrt{b^2\omega^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t + 1)}\,\vec{e}_t = b\omega\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{Bi}$$

$$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_n = \|\vec{a}\| = b\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = b\omega^2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{Bi}$$

III- Dynamique : oscillations d'un pendule



Dans le repère galiléen $\mathscr{R}\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$, dans lequel Ox représente la verticale descendante, une masse ponctuelle m en M est attachée à une tige rigide OM, de longueur l et sans masse. M oscille autour de l'axe horizontal Oz, et on note $\varphi = \left(\vec{e}_x,\overrightarrow{OM}\right)$. $\vec{g}$ est le champ de pesanteur.

a) Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur M. On les exprimera dans la base cylindrique $B = \left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z\right)$ associée à M.

$$\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$$

$$\vec{P} = mg\left(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$$

b) Déduire de la relation fondamentale de la dynamique l'équation du mouvement de M.

$$\overrightarrow{OM} = l\,\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{v}(M/R) = l\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = l\left[\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho\right]$$

Projection de la RFD selon $\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow -mg\sin\varphi = ml\ddot{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

c) Retrouver l'équation du mouvement de M par application du théorème du moment cinétique.

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v}(M/R) = ml\,\vec{e}_\rho \times l\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi.$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_O(M/R) = ml^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \Rightarrow \left[\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt}\right]_R = ml^2\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z.$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{ext}(M/R)\right) = \overrightarrow{OM} \times \vec{P} + \overrightarrow{OM} \times \vec{T}$$

$$= l\vec{e}_\rho \times mg\left(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi\right) = -mgl\sin\varphi\,\vec{e}_z.$$

D'où : $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0.$